

**XVII.**

**GISopen**

**KONFERENCIA**



**SZÉKESFEHÉRVÁR**

**2013. március 12 -13.**

**GEODÉZIAI  
DÁTUMTRANSZFORMÁCIÓ  
KVATERNIÓVAL**

**PAPP ERIK**

**SZENT ISTVÁN EGYETEM  
YBL MIKLÓS ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI KAR  
BUDAPEST**

# TÉMAKÖRÖK

1. *Bevezetés*
2. *A quaternió algebráról röviden*
3. *Dátumtranszformációs modell kvaternióval*
4. *TH Program*
5. *Összefoglalás*

# Bevezetés

- **A dátumtranszformáció**
  - a geodéziában alkalmazott számítási módszer
  - számos, különböző algoritmuson alapuló megoldása ismert
- **A megoldások többsége**
  - kis szögelfordulásokat feltételez
  - linearizálás szükséges a transzformációs paraméterek meghatározásához
- **Az előadás kvaternió alapú dátumtranszformációs analitikus megoldást ismertet**
- **Bemutatja**
  - a kvaternió számításához szükséges összefüggéseket,
  - a kvaterniók alkalmazását
  - **forogás,**
  - az **eltolás és méretarány paraméterek meghatározását**
  - a **Bursa-Wolf dátum transzformációs modellben**

# Bevezetés

***Kvaternió alapú dárumszformációs analitikus megoldás***

***legnagyobb előnye:***

- ***tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható,***
- ***nincs szükség linearizálásra és iterációra,***
- ***a szformációs paraméterek számításához.***

# Bevezetés

## Bemérés

WGS84 → helyi rendszer

- *A GPS-szel történő szabatos helymeghatározáskor a koordináták WGS84 rendszerben adottak, amelyeket gyakran át kell transzformálni egy helyi geodéziai koordináta rendszerbe.*

## Kitűzés

Helyi rendszer → WGS84

- *Kitűzéskor helyi rendszerbeli koordinátákat transzformálunk WGS84 rendszerbe.*

# Bevezetés

## **Dátumtranszformáció esetén**

- *hét transzformációs paramétert kell kiszámítanunk,*
- ***három eltolást,***
- ***három elforgatást***
- ***és a méretarány paramétert.***
- *A forgatási paramétereket általában három forgásszöggel szokás megadni.*
- *A forgatási mátrixban kilenc ismeretlen szerepel, amelyekre hat ortogonalitási és normalizálási feltétel teljesül.*

# Bevezetés

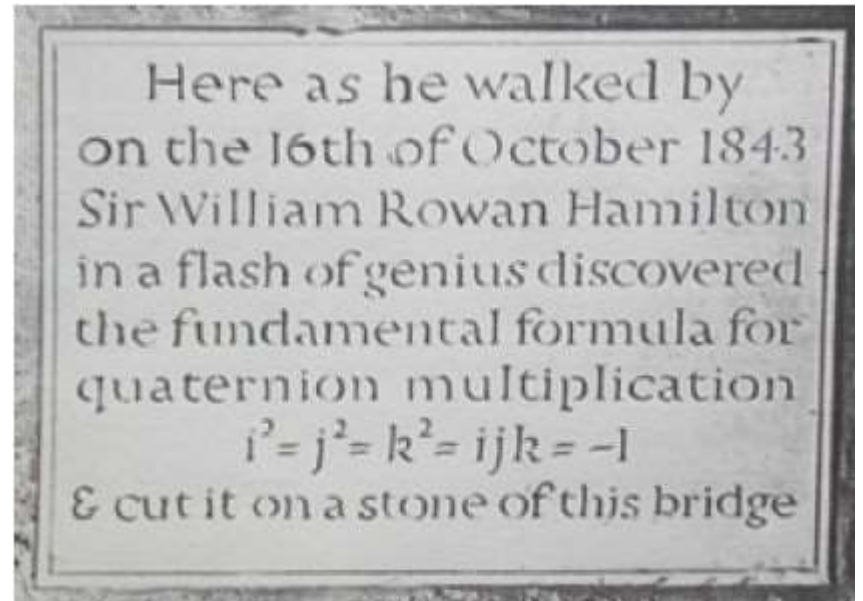
*Hamilton (1843) 170 éve fedezte fel a kvaterniókat egy 3D vektor ábrázolására.*

- *A kvaternió nagyon alkalmas a forgatás egységsugarú gömbön történő leírására.*
- *Ezért széleskörben alkalmazzák*
  - *mozgó objektum helyzetének leírására*
  - *mint például űrhajó, repülőgép vagy gépjármű*
  - *továbbá a robotok irányításában*
  - *az animációban,*
  - *fizikában és*
  - *mechanikában*
- *A továbbiakban megvizsgáljuk a **dátumtranszformáció megoldását** a kvaternió algebra jelölésével illetve **alkalmazásával** és **bemutatjuk a kvaternió alapú dátum transzformációs algoritmust.***





*Sir William Rowan Hamilton*



*Broome Bridge in Dublin Ireland*

# A kvaternió algebráról röviden

A  $Q$  kvaternió komplex számként a következőképpen definiálható

$$Q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = q_0 + \mathbf{q} \quad (1)$$

ahol

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

és a képzetes rész

$$\mathbf{q} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$$

egy 3D vektort jelöl

# A kvaternió algebráról röviden

A megfelelő **konjugált kvaternió** az alábbiak szerint jelölhető

$$Q^* = q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k} = q_0 - \mathbf{q} \quad (2)$$

A  $\mathbf{Q}$  kvaternió **oszlopvektor formában** is kifejezhető az  $(1 \mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k})$  egységvektorok felhasználásával

$$\mathbf{Q} = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3)^T = (q_0 \ \mathbf{q}^T)^T \quad (3)$$

ahol

$$\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T$$

egy 3D vektort és  $T$  a transzponálást jelöli.

# A kvaternió algebráról röviden

Egy 3D  $\mathbf{p}$  vektor mindig megadható kvaterniókal a következők szerint

$$\mathbf{p} = 0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} = 0 + \mathbf{p} \quad (4)$$

A kvaternió hossza

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (5)$$

Ha  $\|Q\| = 1$ , akkor a  $Q$  kvaterniót egység kvaterniónak nevezzük.

# A kvaternió algebráról röviden

A  $Q$  kvaternió definíciójának megfelelően könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok

$$\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q \quad (6)$$

$$PQ = p_0q_0 + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (7)$$

$$C(P + Q) = CP + CQ \quad (8)$$

$$CPQ = (CP)Q = C(PQ) \quad (9)$$

ahol  $\lambda$  egy valós szám,  $C$ ,  $P$  és  $Q$  kvaterniók, a  $\cdot$  és  $\times$  a skaláris és a vektoriális szorzat jele.

# A kvaternió algebráról röviden

A  $Q$  kvaternió definíciójának megfelelően könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok

$$(PQ)^* = Q^* P^* \quad (10)$$

$$QQ^* = \|Q\| \quad (11)$$

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|} \quad (12)$$

a  $Q^{-1}$  a  $Q$  kvaternió inverzét jelöli

# A kvaternió algebráról röviden

Vektorok **skaláris** és **vektoriális** szorzata a következőképpen definiálható

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{p}^T \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} \times \mathbf{q} = \mathbf{C}(\mathbf{p})\mathbf{q} \quad (13)$$

A kvaternió szorzat  $\mathbf{C} = \mathbf{PQ}$  (7) egyenlet oszlopvektor és mátrix szorzataként kifejezhető

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 \mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ahol

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{I}$  egy  $3 \times 3$  egységmátrix.

# A kvaternió algebráról röviden

Bevezetve a következő mátrix jelöléseket

$$\mathbf{P}^+ = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 \mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^- = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ahol a + és – felsőindex a  $\mathbf{C}(\cdot)$  mátrix előjelét jelöli

Behelyettesítve a (15) egyenletet a (14) egyenletbe, eredményül a szorzat kvaternió vektor és mátrix formáját kapjuk:

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}^+ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \mathbf{P} \quad (16)$$



# A kvaternió algebráról röviden

Egyszerűen bizonyítható, hogy a konjugált kvaternió a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\left(\mathbf{P}^*\right)^+ = \left(\mathbf{P}^+\right)^T, \quad \left(\mathbf{P}^*\right)^- = \left(\mathbf{P}^-\right)^T \quad (17)$$

# A kvaternió algebráról röviden

Jól ismert módszer egy 3D  $\mathbf{p}$  vektor  $\mathbf{s}$  vektorba történő forgatására kvaternióval a következő:

$$S = QPQ^* \quad (18)$$

ahol a  $\mathbf{p}$  és  $\mathbf{s}$  vektorokból képzett kvaterniók a  $P$  és  $S$ ,

$Q$  pedig egység kvaternió, amely az alábbiak szerint definiálható

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_n \sin \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

ahol  $\mathbf{e}_n = e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}$  és  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$

amely egy 3D egység vektor,  $\theta$  a forgásszög az  $\mathbf{e}_n$  egységvektor körül és az

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = -1$$

# A kvaternió algebráról röviden

Összehasonlítva a (19) egyenletet az (1) egyenlettel, nyilvánvaló, hogy

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \quad , \quad q_1 = e_1 \sin \frac{\theta}{2} \quad , \quad q_2 = e_2 \sin \frac{\theta}{2} \quad , \quad q_3 = e_3 \sin \frac{\theta}{2}$$

A (16) és (17) egyenletek alapján a (18) egyenlet kifejezhető vektor-mátrix formában

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{P}^+ \mathbf{Q}^* \quad (20)$$

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

- Legtöbb dátumtranszformációs modell **hétparaméteres**, amelyek két különböző geodéziai dátumhoz tartozó közös pontok felhasználásával kerülnek kiszámításra.
- A jól ismert **Bursa-Wolf hasonlósági transzformációs modell**, amelyet **klasszikus** modellnek, **hétparaméteres** modellnek, vagy **térbeli Helmert** modellnek is neveznek a következők szerint írható fel:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{t} + k\mathbf{R}\mathbf{p}_i \quad (21)$$

ahol  $\mathbf{s}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  ( $i=1,\dots,n$ ) a két különböző rendszerben adott közös pontok 3D koordinátái

$\mathbf{t} = (t_x t_y t_z)^T$  jelöli a **három eltolás paramétert**

$k$  a **méretarány tényező** (ebben a hétparaméteres modellben)

és a  $3 \times 3$  -as  $\mathbf{R}$  **forgatási mátrix három forgatási paramétert** tartalmaz.

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Nyilvánvaló, hogy hét paraméter meghatározásához a közös pontok számának  $s_i, p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), nagyobbnak vagy egyenlőnek kell lennie, mint három.

Határozzuk meg a **súlypontra vonatkozó**  $\Delta s_i, \Delta p_i$  koordinátákat:

$$\Delta \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i - \bar{\mathbf{s}} \quad , \quad \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}} \quad (22)$$

ahol

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i, \quad \bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$$

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

*Behelyettesítve a (22) egyenletet a (21) egyenletbe a következőt kapjuk*

$$\Delta \mathbf{s}_i = \Delta \mathbf{t} + k\mathbf{R}\Delta \mathbf{p}_i \quad (23)$$

és

$$\Delta \mathbf{t} = \mathbf{t} + k\mathbf{R}\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{s}} \quad (24)$$

*A (23) egyenlet általában túlhatározott.*

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Jelölje a maradékvektort  $\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{v}_i = \Delta \mathbf{s}_i - \Delta \mathbf{t} - k \mathbf{R} \Delta \mathbf{p}_i \quad (25)$$

Ezek után a transzformációs paraméterek a következő optimalizálási feladat megoldásával határozhatók meg

$$\min_{k, \Delta \mathbf{t}, \mathbf{R}} \sum \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = \min_{k, \Delta \mathbf{t}, \mathbf{R}} \left[ n \Delta \mathbf{t}^T \Delta \mathbf{t} + \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{s}_i - k \mathbf{R} \Delta \mathbf{p}_i)^T (\Delta \mathbf{s}_i - k \mathbf{R} \Delta \mathbf{p}_i) \right] \quad (26)$$

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Mivel a (26) egyenlet jobb oldalán lévő  $\Delta t$  első tag független a másodiktól, ezért  $\Delta t = 0$ , vagy ami ezzel egyenlő

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{s}} - k\mathbf{R}\bar{\mathbf{p}} \quad (27)$$

Ebből következően csak egy rész-optimalizálási feladatot kell megoldanunk, nevezetesen

$$\min_{k, \Delta t, \mathbf{R}} \left[ \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{s}_i - k\mathbf{R}\Delta \mathbf{p}_i)^T (\Delta \mathbf{s}_i - k\mathbf{R}\Delta \mathbf{p}_i) \right] \quad (28)$$



# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Mivel  $\mathbf{R}$  ortogonális mátrix, a (28) egyenlet a következő alakban is felírható

$$\min_{k, \Delta t, \mathbf{R}} \left[ \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{s}_i^T \Delta \mathbf{s}_i - 2k \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{s}_i^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{p}_i + k^2 \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{p}_i^T \Delta \mathbf{p}_i \right] \quad (29)$$

A (29) egyenlet  $k$  szerinti parciális differenciálhányadosát véve meghatározhatjuk a **méretarány paramétert**, amelyre az alábbi összefüggést kapjuk

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{s}_i^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{p}_i^T \Delta \mathbf{p}_i} \quad (30)$$

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Behelyettesítve a (30) egyenletet a (29) egyenletbe a következő problémához jutunk

$$\min_{\mathbf{R}} \left[ \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{s}_i^T \Delta \mathbf{s}_i - \left( \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{s}_i^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{p}_i \right)^2 / \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{p}_i^T \Delta \mathbf{p}_i \right] \quad (31)$$

Az egyetlen paraméter, amelyre meg kell oldanunk a (31) egyenletet az  $\mathbf{R}$  forgatási mátrix, továbbá a (31) egyenletben szereplő minimumkeresési feladat így egyenértékű a (31) egyenlet második tagja maximumának a meghatározásával, nevezetesen

$$\max_{\mathbf{R}} \left[ \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{s}_i^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{p}_i \right] \quad (32)$$

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Bevezetve az  $R$  forgatási mátrixot képviselő  $Q$ ,  $S_i$  és  $P_i$  vektor-kvaterniókat, a (32) egyenlet megadható kvaterniókkal

$$\max_Q \left[ \sum_{i=1}^n S_i^T Q^+ P_i^+ Q^* \right] \quad (33)$$

ahol

$$S_i = \left( 0, \Delta s_i^T \right)^T, \quad P_i = \left( 0, \Delta p_i^T \right)^T \quad \text{és} \quad Q = \left( q_0, \mathbf{q}^T \right)^T$$

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

A (33) egyenletben szereplő  $\sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i^T \mathbf{Q}^+ \mathbf{P}_i^+ \mathbf{Q}^*$  kifejezés átrendezhető a (17) egyenlet alapján, lásd Shan 235. oldal (2006).

A részletes levezetés nélkül a következő, **számításra alkalmas összefüggést** kapjuk:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i^T \mathbf{Q}^+ \mathbf{P}_i^+ \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^T \mathbf{N} \mathbf{Q} \quad (34)$$

ahol  $\mathbf{N}$  egy  $4 \times 4$  mátrix

$$\mathbf{N}_{4 \times 4} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{s}_i^T \Delta \mathbf{p}_i & \Delta \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}(\Delta \mathbf{p}_i) \\ -\mathbf{C}(\Delta \mathbf{s}_i) \Delta \mathbf{p}_i & \Delta \mathbf{s}_i \Delta \mathbf{p}_i^T + \mathbf{C}(\Delta \mathbf{s}_i) \mathbf{C}(\Delta \mathbf{p}_i) \end{bmatrix} \quad (35)$$

# Dátumtranszformáció modell kvaternióval

**N** mátrix

$$\mathbf{N}_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{11} & \mathbf{n}_{12} \\ \mathbf{n}_{21} & \mathbf{n}_{22} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{s}_i^T \Delta \mathbf{p}_i & \Delta \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}(\Delta \mathbf{p}_i) \\ -\mathbf{C}(\Delta \mathbf{s}_i) \Delta \mathbf{p}_i & \Delta \mathbf{s}_i \Delta \mathbf{p}_i^T + \mathbf{C}(\Delta \mathbf{s}_i) \mathbf{C}(\Delta \mathbf{p}_i) \end{bmatrix}$$

The diagram shows the structure of the 4x4 matrix N. The top-left block is n11 (1x1), the top-right is n12 (1x3), the bottom-left is n21 (3x1), and the bottom-right is n22 (3x3). The summation term shows the contribution of each data point i, with the top row containing the scalar product of delta s\_i^T and delta p\_i, and the top-right element being delta s\_i^T times the covariance matrix C(delta p\_i). The bottom row contains the negative of C(delta s\_i) times delta p\_i, and the bottom-right element is the sum of delta s\_i times delta p\_i^T and C(delta s\_i) times C(delta p\_i).

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Következésképpen a (33) egyenletben szereplő maximumkeresési feladat az  
alábbiak szerint írható

$$\max_Q [Q^T N Q] \quad (36)$$

Más szavakkal, a (32) egyenletben szereplő maximumkeresési feladat  
egyenértékű a  $Q$  kvaternió meghatározásával, a (36) egyenlet  
maximumkeresési feladatával.

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Mivel  $\mathbf{N}$  egy valódi szimmetrikus mátrix, amely négy valós  $\lambda_i$  sajátértéket, és négy ezekhez tartozó megfelelő valós  $\mathbf{e}_i$  sajátvektort tartalmaz

$$\mathbf{N}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i \quad , \quad (i = 1, \dots, n) \quad (37)$$

ezért a (36) egyenletben szereplő maximum meghatározási feladat azonos az  $\mathbf{N}$  mátrix sajátvektorához tartozó maximális sajátértékének a meghatározásával

$$\mathbf{Q} = \mathbf{e}_i \quad , \quad \text{és} \quad \lambda_j = \max_i \{\lambda_i\} \quad (38)$$

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

A (20) egyenlet a következőképpen alakítható át

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{P}^+ \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^+ (\mathbf{Q}^*)^- \mathbf{P} = \mathbf{Q}^+ (\mathbf{Q}^-)^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T + q_0 \mathbf{C}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} \mathbf{P} \quad (39)$$

Az  $\mathbf{R}$   $3 \times 3$  forgatási mátrix

$$\mathbf{R} = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T + q_0 \mathbf{C}(\mathbf{q})) \quad (40)$$

ahol a  $\mathbf{q}$  egy 3D vektort jelöl,  $\mathbf{I}$  egy  $3 \times 3$  egységmátrix ld. a (14) egyenletet.



# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Ezek után a **forgásszögek**, az **R** forgatási mátrix elemeiből számíthatók

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad \alpha_X = \arctg\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right), \quad \beta_Y = \arcsin(-r_{13}), \quad \gamma_Z = \arctg\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right)$$

**(41)**

ahol  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  az **X**, **Y** és **Z** tengelyek körüli forgásszögeket jelölik.

# Dátumtranszformációs modell kvaternióval

**A kvaternió algebra alkalmazásán alapuló dátum transzformációs algoritmus végezetül az alábbiak szerint foglalható össze**

1. A súlypontra vonatkozó  $\Delta s_i, \Delta p_i$  koordináták számítása (22) egyenlet
2. Az **N** mátrix számítása (36) egyenlet
3. Az **N** mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak számítása. Az **N** mátrix sajátvektorához tartozó maximális sajátérték a **Q** kvaternió megoldása
4. Az **R** forgatási mátrix számítása (40) egyenlet
5. **k** méretarány paraméter számítása (30) egyenlet
6. **t** eltolás paraméter számítása (27) egyenlet

# TH Program

*Abból a célból, hogy bemutassuk a (36) (40) (30) és (27) összefüggések érvényességét megismételtük Grafarend és Avange (2003) és Shan – Chan – Zheng (2006) számításait.*

*Az eredmények teljes egyezést mutatnak úgy a transzformációs paraméterek mind pedig, a transzformált koordináták és maradék ellentmondások tekintetében.*

# TH Program

A **Térbeli Helmert** transzformáció megoldására *J* nyelvű programot készítettük

```
NB.=====
NB.      Térbeli HELMERT transzformáció kvaternióval J nyelven (J602a)
NB.      Bursa-Wolf hasonlósági transzformáció
NB.      Fájlból történő átszámítás
NB.      Ismert transzformációs paraméterek: p''
NB.      Transzformációs paraméterek közös pontok alapján: FKJ tp CKJ
NB.      Új pontok transzformálása : TH KJ
NB.=====
```



Home Page: [www.jsoftware.com](http://www.jsoftware.com)

# TH Program

**Table 1** Coordinates for local system and WGS-84 system

Station name	System A (local system)			System B (WGS-84)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
Solitude	4,157,222.543	664,789.307	4,774,952.099	4,157,870.237	664,818.678	4,775,416.524
Buoch Zeil	4,149,043.336	688,836.443	4,778,632.188	4,149,691.049	688,865.785	4,779,096.588
Hohenneuffen	4,172,803.511	690,340.078	4,758,129.701	4,173,451.354	690,369.375	4,758,594.075
Kuehlenberg	4,177,148.376	642,997.635	4,760,764.800	4,177,796.064	643,026.700	4,761,228.899
Ex Mergelaec	4,137,012.190	671,808.029	4,791,128.215	4,137,659.549	671,837.337	4,791,592.531
Ex Hof Asperg	4,146,292.729	666,952.887	4,783,859.856	4,146,940.228	666,982.151	4,784,324.099
Ex Kaisersbach	4,138,759.902	702,670.738	4,785,552.196	4,139,407.506	702,700.227	4,786,016.645

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

n = 7 közös pont

=====

# TH Program

N mátrix

4840000812.6107607	6797.3602778054774	_4449.1045040902682	_11326.777577847242
6797.3602778054774	_1830759441.919066	_1718881883.8685288	_2336633587.9495964
_4449.1045040902682	_1718881883.8685288	_51690149.170300066	825686706.84362614
_11326.777577847242	_2336633587.9495964	825686706.84362614	_2957551221.5213947

sajátértékek, baloldali és jobboldali sajátvektorok

_0.999999999999182676	3.9126447306007148e_6	_8.9927464923568698e_7	_4.7891704079319994e_7
_2.4204318721488819e_6	_0.5847354134070647	0.49123001299988311	_0.64558312449284605
2.1663738402156018e_6	0.7030732528868926	0.70387664657394744	_0.10122088459485484
2.4073178334679743e_6	0.40468814829125416	_0.51307966314709863	_0.75695228508252765

4840000812.6641178 1853142281.7415218 \_1853155553.2837625 \_4839987541.1218777

_0.999999999999182676	3.9126447306007139e_6	_8.9927464923564823e_7	_4.7891704079325044e_7
_2.420431872148934e_6	_0.58473541340706459	0.49123001299988311	_0.64558312449284594
2.1663738402155687e_6	0.70307325288689237	0.70387664657394733	_0.10122088459485469
2.4073178334679565e_6	0.40468814829125405	_0.51307966314709896	_0.75695228508252776

maximális sajátérték

4840000812.6641178

# TH Program

Q kvaternió = a maximális sajátértékhez tartozó sajátvektor

```
_0.99999999999182676  
_2.4204318721488819e_6  
_2.1663738402156018e_6  
2.4073178334679743e_6
```

R forgatási mátrix

```
0.99999999997903011 4.8146251728400948e_6 _4.3327593334621954e_6  
_4.8146461470812341e_6 0.99999999997669953 _4.840853309659707e_6  
4.3327360264670083e_6 4.8408741702611934e_6 0.99999999997890354
```

k méretarány

```
1.0000055825198522
```

t eltolás

```
641.88042527250946  
68.655345452483743  
416.39818477910012
```

# TH Program

**Table 2** Computed transformation parameters

Parameters	Values
Translation	
$t_x$	641.8804 (m)
$t_y$	68.6554 (m)
$t_z$	416.3982 (m)
Rotation	
$\varepsilon_x$	-0.99849861''
$\varepsilon_y$	0.893696604''
$\varepsilon_z$	0.993088663''
Scale	
$k - 1$	5.5825 (ppm)

---

---

Transzformációs paraméterek

Eltolás			Elforgatás	Méretarány
641.88042527250946	0	0	0.998497670887	1.0000055825198522
68.65534545248374	0	0	0.893695764524	
416.39818477910012	0	0	0.993087729872	

---

---



# TH Program

Table 3 Computed quaternion and rotation matrix

Quaternion		Rotation matrix	
0.9999999999183	0.9999999997902	0.00000481462557	-0.00000433275956
0.00000242043167	-0.00000481464655	0.9999999997669	-0.00000484085291
-0.00000216637395	0.00000433273625	0.00000484087377	0.9999999997890
-0.00000240731803			

Q kvaternió

q0 = 0.9999999999183  
q1 = -0.00000242043187  
q2 = 0.00000216637384  
q3 = 0.00000240731783

Q kvaternió
0.9999999999182676
-2.4204318721488819e_6
2.1663738402156018e_6
2.4073178334679743e_6

R forgatási mátrix
0.9999999997903011 4.8146251728400948e_6 -4.3327593334621954e_6
-4.8146461470812341e_6 0.9999999997669953 4.840853309659707e_6
4.3327360264670083e_6 4.8408741702611934e_6 0.9999999997890354

# TH Program

=====  
Transzformációs paraméterek

Eltolás			Elforgatás	Méretarány
641.88042527250946	0	0	_0.998497670887	1.0000055825198522
68.65534545248374	0	0	0.893695764524	
416.39818477910012	0	0	0.993087729872	

=====  
MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	_50	14	78
Hohenneuffen	_40	_88	_8	97
Kuehlenberg	20	_22	_87	92
Ex Mergelaec	_92	14	_5	93
Ex Hof Asperg	_12	7	_55	56
Ex Kaisersbach	_29	4	2	30

=====  
Súlyegység középpontja: m0 = 0.077233660859330686

=====  
Q kvaternió

q0 = \_0.999999999999183  
q1 = \_0.00000242043187  
q2 = 0.00000216637384  
q3 = 0.00000240731783  
=====

# TH Program

Térbeli HELMERT transzformáció

Közös pontok

PSZ                      Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

n = 7 közös pont

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
641.88042527250946	0 0 0.998497670887	1.0000055825198522
68.65534545248374	0 0 0.893695764524	
416.39818477910012	0 0 0.993087729872	

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	50	14	78
Hohenneuffen	40	88	8	97
Kuehlenberg	20	22	87	92
Ex Mergelaec	92	14	5	93
Ex Hof Asperg	12	7	55	56
Ex Kaisersbach	29	4	2	30

Súlyegység középpontja: m0 = 0.077233660859330686

Q kvaternió

q0 = 0.999999999999183  
q1 = 0.00000242043187  
q2 = 0.00000216637384  
q3 = 0.00000240731783

# TH Program

**Table 5** Transformed coordinates in system B from system A and residuals

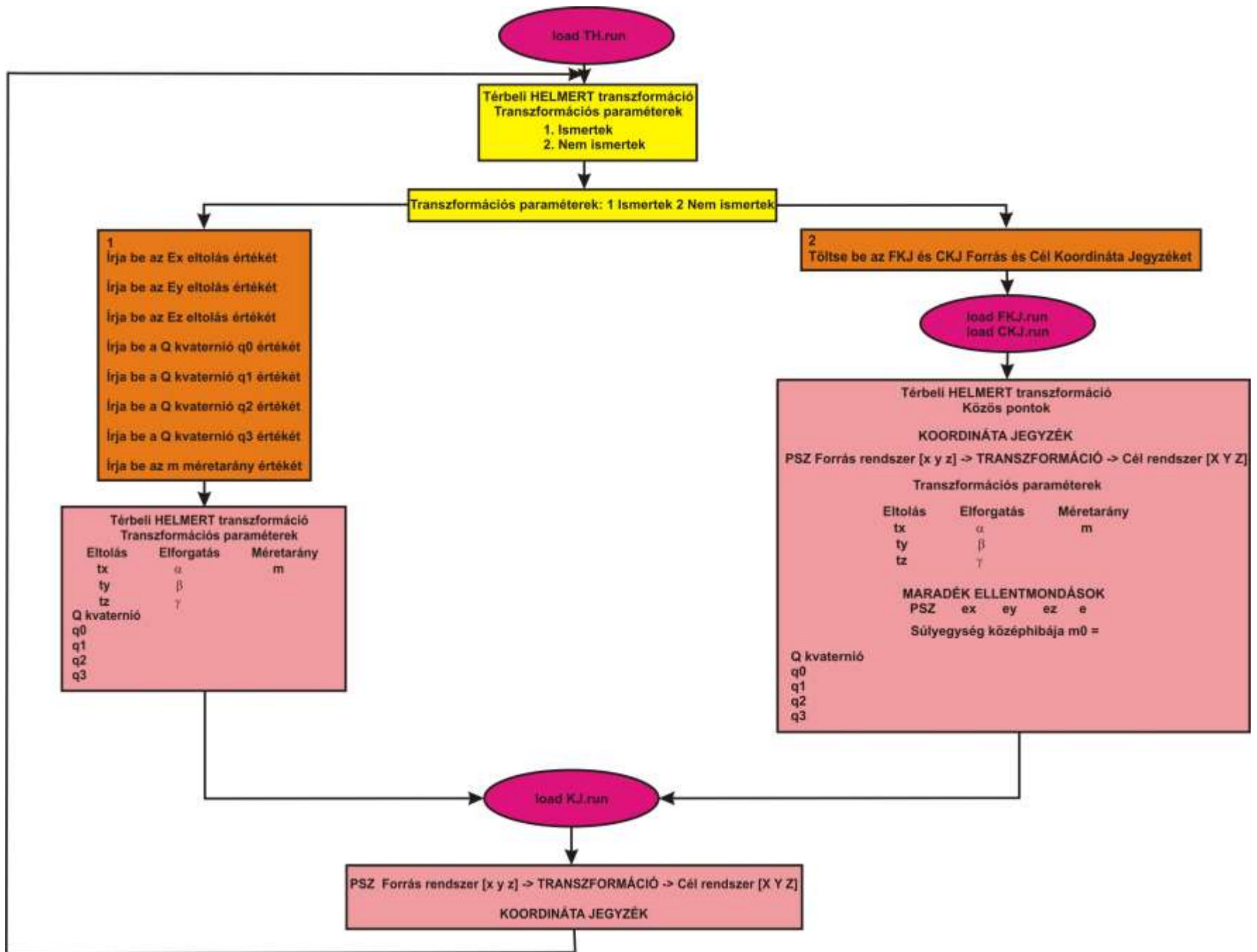
Station name	Transformed coordinates in system B		
	X (m)	Y (m)	Z (m)
Solitude	4,157,870.143	664,818.543	4,775,416.384
Buoch Zeil	4,149,690.990	688,865.835	4,779,096.574
Hohenneuffen	4,173,451.394	690,369.463	4,758,594.083
Kuehlenberg	4,177,796.044	643,026.722	4,761,228.986
Ex Mergelaec	4,137,659.641	671,837.323	4,791,592.536
Ex Hof Asperg	4,146,940.240	666,982.144	4,784,324.154
Ex Kaisersbach	4,139,407.535	702,700.223	4,786,016.643

=====  
 PSZ                      Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]  
 =====

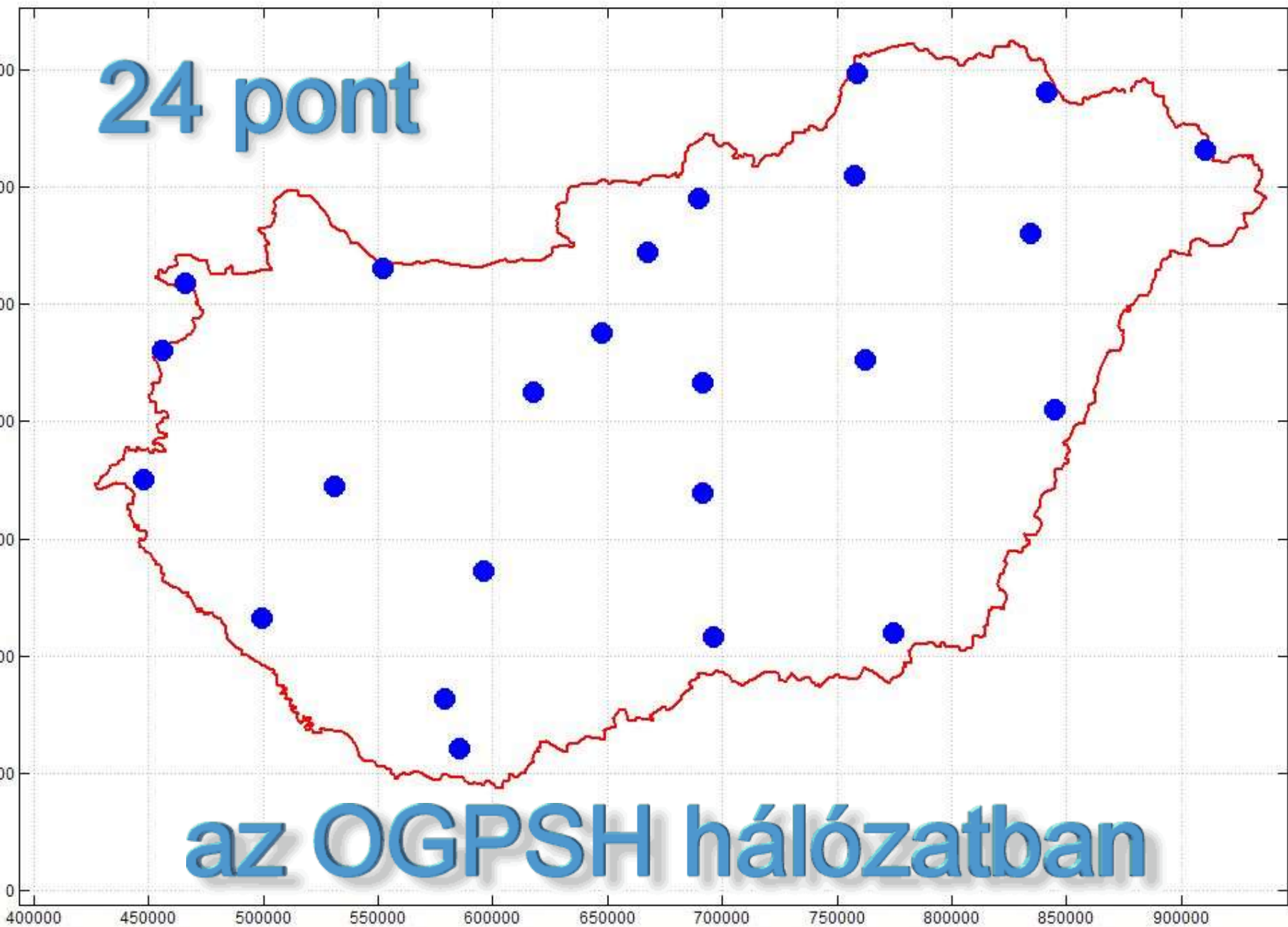
## KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.143	664818.543	4775416.384
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149690.990	688865.835	4779096.574
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.394	690369.463	4758594.083
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.044	643026.722	4761228.986
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.641	671837.323	4791592.536
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.240	666982.144	4784324.154
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.535	702700.223	4786016.643

=====



24 pont



az OGPSH hálózatban

# 24 OGPSH pont

## Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
47.74933348270133	0 0 0.306123808591	1.0000021579325942
_69.28041060944088	0 0 _0.065931015976	
_10.99728770926595	0 0 0.470623193073	

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.3241854318337738$

Q kvaternió
0.9999999999990612
7.4206523491964712e_7
_1.5982044620896585e_7
1.1408229318445963e_6

## Kitűzés

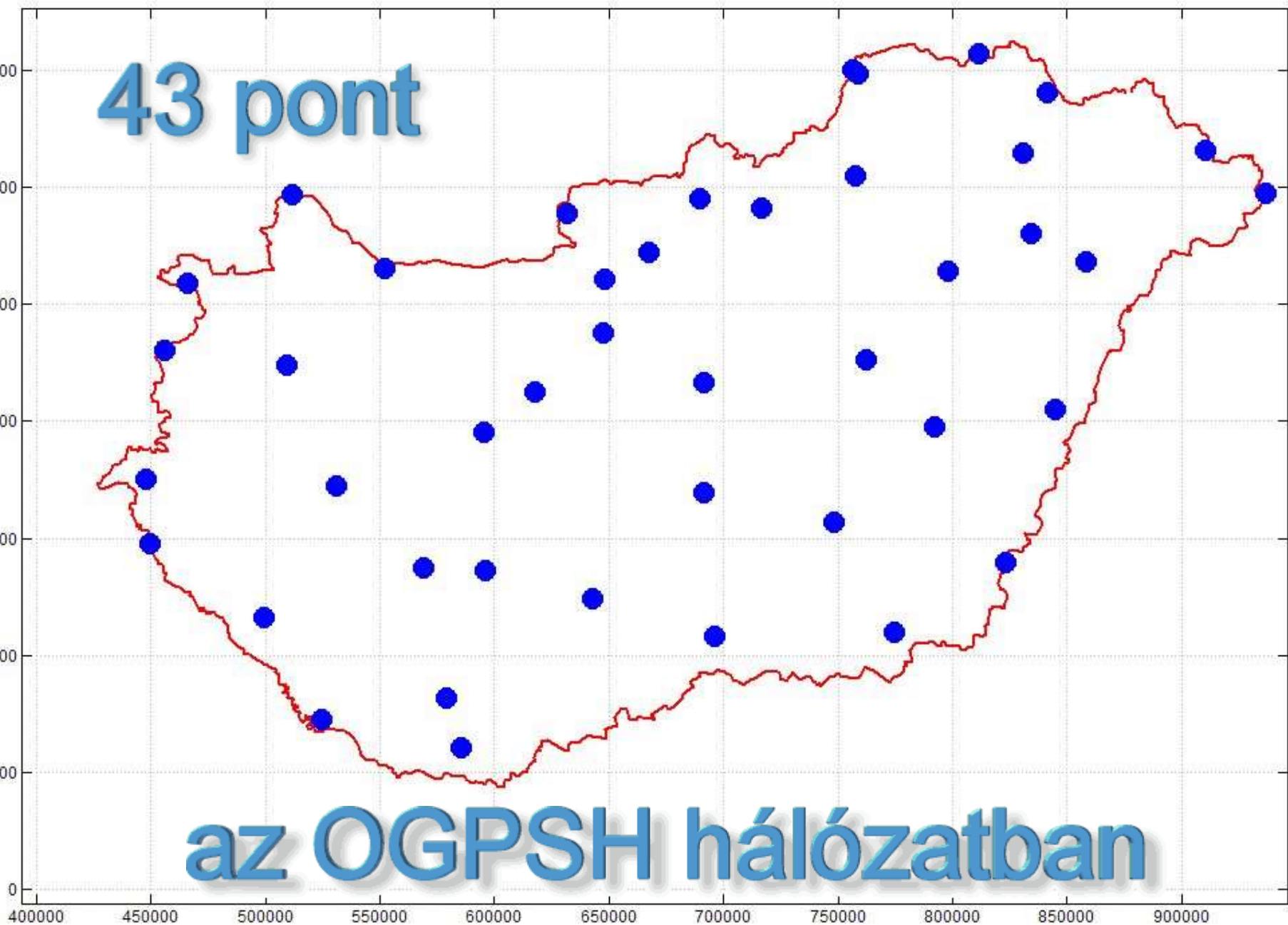
Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
_47.74934213329107	0 0 _0.306123959022	0.9999978420598722
_69.28015322983265	0 0 0.065930317510	
10.99740835465491	0 0 _0.470623290923	

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.32418473228911937$

Q kvaternió
0.9999999999990612
7.4206523491964712e_7
_1.5982044620896585e_7
1.1408229318445963e_6

43 pont



az OGPSH hálózatban



# 43 OGPSH pont

## Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás	Méretarány
47.09499303298071	0	0 0.263032373949	1.0000020978530781
_67.88777859602124	0	0 _0.096984246011	
_10.49329041223973	0	0 0.488207598695	

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.37292629217956724$

Q kvaternió
0.99999999999906874
_6.3760874555051456e_7
2.3509569201293768e_7
_1.18344876524293e_6

## Kitűzés

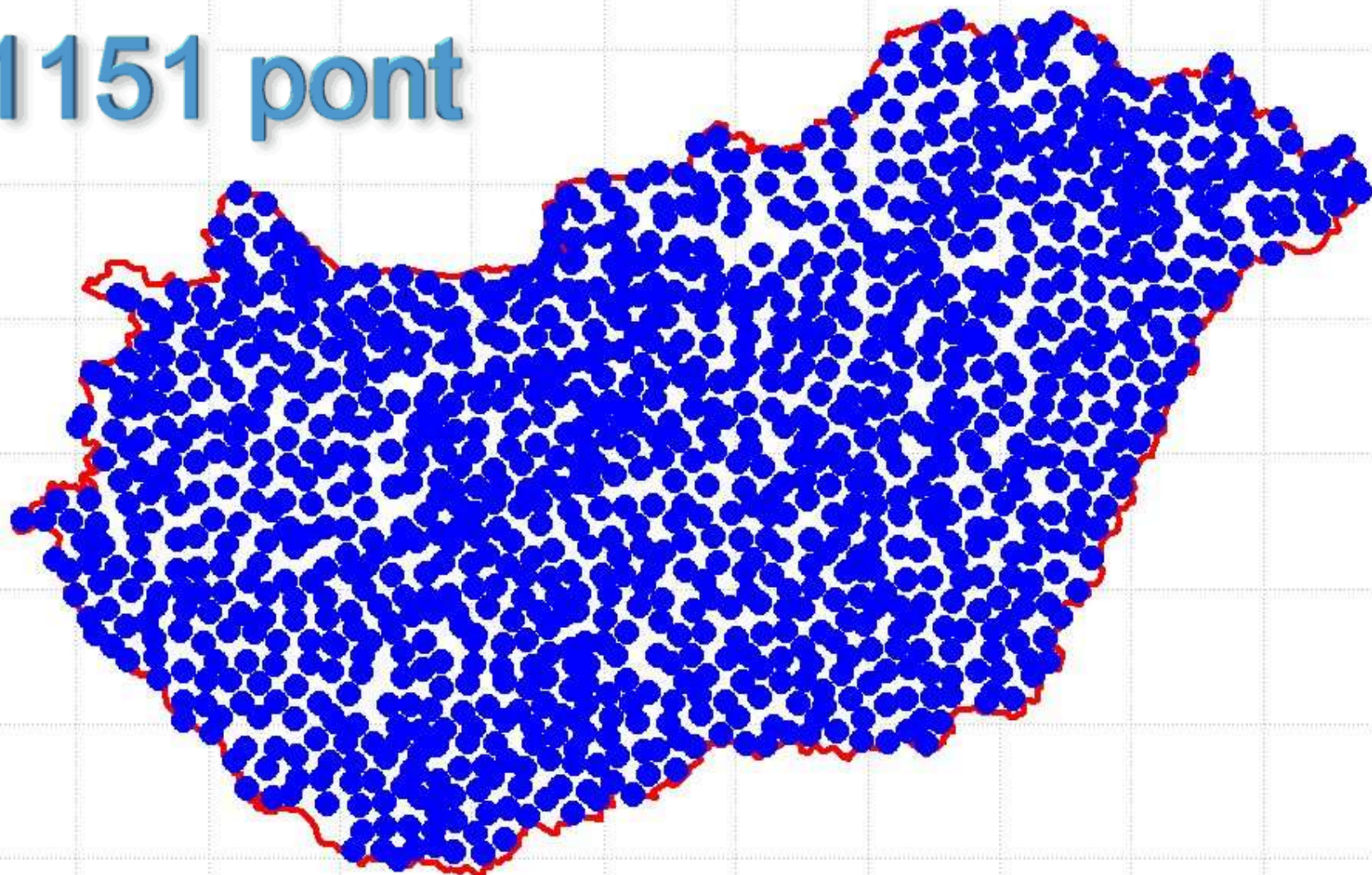
Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás	Méretarány
_47.09499386139214	0	0 _0.263032603500	0.9999979021351638
67.88753455318511	0	0 0.096983623440	
10.49340822361410	0	0 _0.488207722370	

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.37292550982340555$

Q kvaternió
_0.99999999999906874
_6.3760874555051456e_7
2.3509569201293768e_7
_1.18344876524293e_6

1151 pont



az OGPSH hálózatban

# 1151 OGPSH pont

## Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
53.41677557630464	0 0 0.142687965708	1.0000020425996370
_64.83033404103480	0 0 0.176147282232	
_16.46120938099921	0 0 0.500099295632	

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.25089784540964433$

Q kvaternió
_0.99999999999911426
3.4588487189221364e_7
4.2699348088853207e_7
1.2122747544867055e_6

## Kitűzés

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
_53.41677066683769	0 0 _0.142687538630	0.9999979573950342
_64.83007442043163	0 0 _0.176147628185	
16.46131043229252	0 0 _0.500099173778	

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.25089733292912053$

Q kvaternió
0.99999999999911426
3.4588487189221364e_7
4.2699348088853207e_7
1.2122747544867055e_6

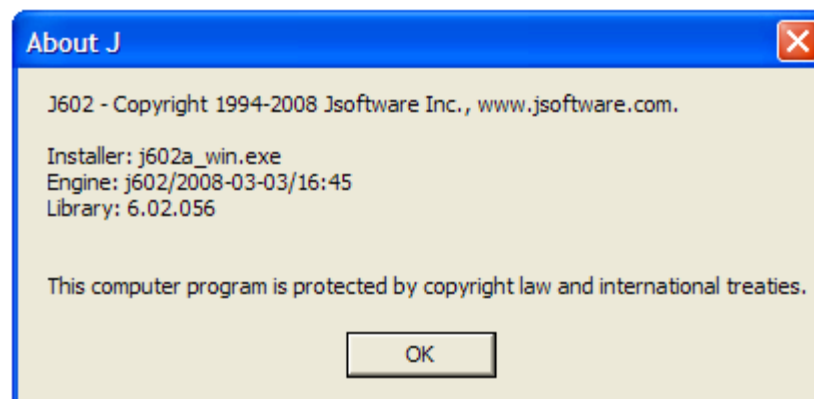
# TH Program

## ***Térbeli Helmert program futtatása***

<b><i>Közös pontok száma</i></b>	<b>7</b>	<b>24</b>	<b>43</b>	<b>1151</b>
<b><i>Program futás ideje</i></b> [sec]	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
<b><i>Eredmények listája</i></b> [A4-es lapméret] [8-as betűméret]	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>31</b>



Home Page: [www.jsoftware.com](http://www.jsoftware.com)



# Összefoglalás

- *A dátumtranszformáció széles körben alkalmazott a geodéziában és a kartográfiában. Számos algoritmus használata javasolt.*
- *Az algoritmusok többsége azonban **kicsiny forgásszögek feltételezésén** alapszik, továbbá **linearizálás szükséges** a transzformációs paraméterek széleskörű gyakorlati felhasználás céljára történő meghatározásához.*
- *Az előadás kvaternió algebra alkalmazásán alapuló dátumtranszformációs analitikus megoldást mutatott be a paraméterek meghatározására.*

# Összefoglalás

## Kvaternió alapú dárumszformációs analitikus megoldás

### legnagyobb előnye:

- *tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható,*
- *nincs szükség linearizálásra és iterációra,*  
*a szformációs paraméterek számításához.*
- *Az algoritmus alkalmazhatóságát számpéldán mutattuk be.*

# Összefoglalás

- *Azonban meg kell jegyezzük, hogy analitikus megoldáskor, bizonyos egyszerűsítéseket kellett alkalmaznunk a pontok hibáinak függetlenségére vonatkozóan.*
- *Ezek nélkül nem lehetséges az analitikus megoldás.*
- *Ez a fő hátrány ezeknél az algoritmusoknál.*
- *Mindazonáltal a módszer elfogadható eredményt adott.*

# Hivatkozások

**Grafarend EW, Awange LJ** (2003): *Nonlinear analysis of the threedimensional datum transformation [conformal group C7(3)]. J Geod 77:66–76*

**Hamilton WR** (1853): *Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a Newmathematical method, Hodges and Smith, Dublin*

**Papp et al.** (1997): *GPS network transformation into different datums and projection systems. Reports on Geodes, No.4(27), 265-280.*

**Papp at al.** (2002): *Hungarian GPS Network Transformation into Different Datums and Projection Systems. Per. Pol. Civ. Eng. (46/2), 199-204*

**Papp E - Szűcs L** (2005): *Földi és műholdas hálózatok transzformációja Geomatikai Közlemények VIII. 85-92*

**Vaníček P, Steeves RR** (1996): *Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums. J Geod 70:740–745*

**Vaníček P, Novák P, Craymer MR, Pagiatakis S** (2002): *On the correct determination of transformation parameters of a horizontal geodetic datum. Geomatica 56(4):329–340*

**Welsch WM**(1993): *A general 7-parameter transformation for the combination, comparison and accuracy control of the terrestrial and satellite network observations. Manuscr Geod 17:210–214*

**Yang Y** (1999): *Robust estimation of geodetic datum transformation. J Geod 73:268–274*

**Y.-Z. Shen · Y. Chen · D.-H. Zheng** (2006): *A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm J Geod 80: 233–239*



VÉGE